# Sistemas Lineares Determinados

Sistemas lineares podem ser representados na notação de multiplicação de matrizes:

No caso em que , obtém-se como coeficientes lineares uma matriz quadrada.

## Teorema de Gauss (escalonamento)

Para sistemas lineares com variáveis e equações independentes do ponto de vista linear, o sistema terá solução única. Isto acontece quando

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |
|  |  |

Vamos verificar se este sistema tem solução única, isto é, se ele atende à condição .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

Vamos resolver este sistema por escalonamento. Para isto, efetue combinações lineares de equações para desaparecer com uma das três variáveis. Para desaparecer com a variável , vamos fazer a seguinte escolha:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

### Teorema de Cramer bidimensional

Vamos desaparecer com a variável .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

## Teorema de Cramer tridimensional

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |
|  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |
|  |
|  |  |  |  |
|  |
|  |
|  |  |  |  |
|  |
|  |

## Demonstração do teorema de Cramer tridimensional

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |
|  |  |

Vamos desaparecer com a variável .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Vamos desaparecer com a variável .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Obtivemos um sistema bidimensional

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Em notação matricial:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |

E que pode ser resolvido usando o teorema de Cramer.

Vamos calcular o denominador das frações que aparecem no teorema:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  | |
|  | | |
|  |  | |
|  |  | |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |

Vamos calcular os numeradores.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Conclusão: o termo pode ser cancelado nas frações:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Assim, define-se o determinante de uma matriz .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Método de Sarrus

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Com esta definição, os numeradores das frações correspondem aos seguintes determinantes:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A condição de existência de uma única solução é a de que o determinante da matriz de coeficientes seja diferente de zero.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

# Sistemas tridimensionais

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |
|  |  |

## Classificação do sistema

Vamos verificar se este sistema possui solução:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |

Como , então o sistema possui uma única solução.

## Solução pelo teorema de Cramer

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Verificação da solução:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |

Tendo obtido uma sentença verdadeira, a solução obtida está correta.

## Inversão de matrizes

No caso em que , obtém-se como coeficientes lineares uma matriz quadrada.

Para sistemas lineares com variáveis e equações independentes do ponto de vista linear, o sistema terá solução única. Isto acontece quando

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Nestas condições, se a matriz de coeficientes for inversível, então a solução da equação será:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Nos exemplos anteriores:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  | |  |  |

Percebemos que cada elemento da matriz inversa é um quociente de determinantes cujos denominadores são o determinante da matriz original:

Vamos obter esta matriz de cofatores.

# Operações entre Matrizes Quadradas

Uma operação é uma função de duas variáveis, em que cada variável é um elemento de um conjunto e o resultado da operação (que é a imagem da função) é um elemento do mesmo conjunto.

## Adição e propriedades da soma

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Associatividade |  | | | |
|  | Existência do elemento neutro |  |  |  |  |
|  | Existência do elemento oposto |  |  |  |  |
|  | Comutatividade da soma |  | | | |

## Propriedades distributivas

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Distributiva à esquerda |  |
|  | Distributiva à direita |  |

## Propriedades do produto

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Associatividade |  | | | |
|  | Existência do elemento neutro |  |  |  |  |
|  | Existência do elemento inverso |  |  |  |  |

No conjunto das matrizes quadradas, não vale a comutatividade do produto:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Comutatividade do produto |  |

Vamos demonstrar estas propriedades para as matrizes com coeficientes inteiros. Para isto, necessitamos de três elementos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Elemento neutro da adição: trata-se do elemento:

Pois:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

A igualdade é devida à existência do , que é o elemento neutro da adição em conjuntos numéricos, aplicando-se este axioma em cada uma das coordenadas.

Elemento oposto: trata-se do elemento:

Pois:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

A igualdade é devida à existência do elemento oposto em conjuntos numéricos, aplicando-se este axioma em cada uma das coordenadas. Exercício de estudo: fazer o outro lado.

Exercício de estudo: mostrar que vale a comutatividade da soma de matrizes quadradas.

Elemento neutro da multiplicação: trata-se do elemento:

Vamos descobrir as coordenadas da matriz identidade:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

Obtivemos um sistema com equações e incógnitas:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Obtivemos que

Vamos verificar a outra propriedade:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

Elemento inverso:

Vamos descobrir as coordenadas da matriz inversa:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |

Obtivemos um sistema com equações e incógnitas:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | | |
|  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Exercício: resolver o sistema para obter que:

<https://cn.ect.ufrn.br/index.php?r=conteudo%2Fsislin-gauss>